

18 oct. 2011 7.07

On invariant Einstein metrics on Kähler homogeneous spaces SU_4/T^3 , G_2/T^2 , $E_6/T^2 \cdot (A_2)^2$, $E_7/T^2 \cdot A_5$, $E_8/T^2 \cdot E_6$, $F_4/T^2 \cdot A_2$

Michail M. Graev

ABSTRACT. We study invariant Einstein metrics on the indicated homogeneous manifolds M , the corresponding algebraic Einstein equations E , the associated with M and E Newton polytopes $P(M)$, and the integer volumes $\nu = \nu(P(M))$ of it (the Newton numbers). We show that $\nu = 80, 152, \dots, 152$ respectively. It is claimed that the numbers $\varepsilon = \varepsilon(M)$ of complex solutions of E equals $\nu - 18, \nu - 18, \nu, \dots, \nu$. The results are consistent with classification of non Kähler invariant Einstein metrics on G_2/T^2 obtained recently by Y. Sakane, A. Arvanitoyeorgos, and I. Chrysikos. We present also a short description of all invariant complex Einstein metrics on SU_4/T^3 . We prove existence of Riemannian non Kähler invariant Einstein metrics on G_2/T^2 -like Kähler homogeneous spaces $E_6/T^2 \cdot (A_2)^2$, $E_7/T^2 \cdot A_5$, $E_8/T^2 \cdot E_6$, $F_4/T^2 \cdot A_2$, where $T^2 \cdot A_5 \subset A_2 \cdot A_5 \subset E_7$ and some other results.

Об инвариантных эйнштейновых метриках на кэлеровых однородных пространствах SU_4/T^3 , G_2/T^2 , $E_6/T^2(A_2)^2$, $E_7/T^2 A_5$, $E_8/T^2 E_6$, $F_4/T^2 A_2$

§ 1. Введение	1
§ 2. Классификация инвариантных эйнштейновых метрик на SU_4/T^3	4
§ 3. Флаговые пространства с системой T -корней типа G_2	5
3.1. Инварианты де Зибенталя пространств M/σ	7
3.2. Трехмерные многогранники P_{12} и P_{16}	8
3.3. Однородные пространства с трехмерными многогранниками P_{12} и P_{16}	9
3.4. Число Ньютона $\nu(G_2/T^2)$	11
3.5. Фасеты многогранника Ньютона $P = P(G_2)$	13
3.6. Неравенство для $\mathcal{E}(G_2/T^2)$	13
Дополнение 1. О пяти особых флаговых пространствах M	14
Дополнение 2. Вычисление комплексных метрик Эйнштейна в M/σ	15
Дополнение 3. Положительно определенные эйнштейновы метрики на M/σ	17
Список литературы	18

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Инвариантные положительно определенные метрики Эйнштейна на 12-мерном однородном пространстве SU_4/T^3 фактически были классифицированы ¹⁾ в статье Ю.Сакане [10].

Теорема 1.1 ([10]). *На 12-мерном кэлеровом однородном пространстве SU_4/T^3 с точностью до изометрии и умножения на скаляр существуют три и только три инвариантные метрики Эйнштейна g , не допускающие никакой инвариантной кэлеровой структуры. Каждая из них имеет в группе Вейля, т.е. симметрической группе S_4 , нетривиальный стабилизатор, содержащий инволюцию σ цикленного типа (12). Все метрики g знакоопределены.*

Ключевые слова и фразы. Однородная метрика Эйнштейна, Homogeneous Einstein metric.

Поддержано РФФИ, грант 10-01-00041а.

¹⁾ Эта работа Ю.Сакане почти не содержит выделенных формулировок, и в ней многое дается расположением материала. Гиббонс, Лу и Поуп [5] оспаривают полноту ее изложения в сходном вопросе о классификации для $Sp(2)/T^2$.

Вместе с метрикой Кэлера–Эйнштейна получаются четыре попарно неэквивалентные инвариантные эйнштейновы метрики на SU_4/T^3 , а вовсе не три, как утверждается в [4, таблица 1] со ссылкой на [10]. Заметим, что стабилизатор инвариантной кэлеровой метрики на SU_4/T^3 в группе S_4 меняет местами две противоположные камеры Вейля (т.е. порожден инволюцией типа (14)(23)) и тогда не содержит отражения σ .

Теорема 1.1 подсказала автору следующий результат, анонсированный в [7, примечание при корректуре] и рассмотренный в §8 диссертации [8].

Теорема 1.2. *На G_2/T^2 -подобных кэлеровых однородных пространствах*

$$G_2/T^2, \quad E_6/T^2 \cdot (A_2)^2, \quad E_7/T^2 \cdot A_5, \quad E_8/T^2 \cdot E_6, \quad F_4/T^2 \cdot A_2 \quad (1.1)$$

(где $T^2 \cdot A_5 \subset A_2 \cdot A_5 \subset E_7$) существуют инвариантные положительно определенные метрики Эйнштейна g , допускающие изометрию, соответствующую отражению в группе Вейля системы корней типа G_2 (т.е. группе диэдра порядка 12) и вследствие этого не допускающие никакой инвариантной кэлеровой структуры.

А.Арванитойеоргос, И.Хрисикос и Ю.Сакане [3] доказали эту теорему независимо для случая 12-мерного пространства G_2/T^2 . Они также явно нашли инвариантные метрики Эйнштейна. Из их формул следует:

Теорема 1.3 ([3]). *На 12-мерном кэлеровом однородном пространстве G_2/T^2 с точностью до изометрии и умножения на скаляр существует 8 и только 8 инвариантных метрик Эйнштейна, а именно:*

- две положительно определенные метрики, не допускающие никакой инвариантной кэлеровой структуры; каждая из них лежит на 3-элементной орбите группы Вейля и удовлетворяет теореме 1.2;
- пять попарно неизометричных индефинитных метрик; каждая из них лежит на 6-элементной орбите группы Вейля;
- хорошо известная инвариантная метрика Кэлера–Эйнштейна (единственная с точностью до изометрии).

С точностью до умножения на скаляр на G_2/T^2 существует 12 знакоопределенных и 30 индефинитных инвариантных метрик Эйнштейна.

Приближенные значения для положительно определенных метрик первого вида, найденные в [3] совпадают с вычисленными в [8].

В [3] на с. 18 выписаны приближенные значения только для 14 индефинитных решений, где 9, 10, 11, 12 и 13-е принадлежат пяти различным орбитам группы Вейля (заметим, что центр этой 12-членной группы состоит из двух элементов, сохраняющих каждую инвариантную метрику). Это дает $30 = 5 \cdot 6$ индефинитных метрик с точностью до умножения на скаляр. Других вещественных решений, порождающих 6-элементные орбиты, не существует, ибо (как показывает простое рассуждение) приведенное в [3] на трех страницах алгебраическое уравнение 84-й степени для одной переменной имеет 30 вещественных корней.

Перейдем к комплексным решениям уравнения Эйнштейна для инвариантных метрик, рассматриваемых с точностью до умножения на комплексное число.

По формуле (8.4) из [8] на G_2/T^2 должно быть 152 – 18 комплексных решений с учетом алгебраических кратностей. За вычетом 6 решений Кэлера–Эйнштейна и еще

44, допускающих отражение из группы Вейля, остается

$$84 = 152 - 18 - 50$$

комплексных решений. Значение 84 было получено с помощью техники многогранника Ньютона. без вычисления всех решений. Теперь, что особенно приятно, оно подтверждено непосредственно [3]. Вдобавок программа MAPLE сообщает, что дискриминант трехстраничного уравнения 84-й степени из [3] отличен от 0. Это подтверждает гипотезу [8] об однократности всех комплексных решений.

Читатель может обратиться к [6, 7] за определениями многогранника Ньютона $Nw(G/H)$ и целого числа Ньютона $\nu(G/H)$, сопоставляемых связному риманову однородному пространству G/H с компактной группой изотропии H с простым спектром представления изотропии. Как там, через $\varepsilon(G/H)$ обозначается число изолированных **комплексных** решений алгебраического уравнения Эйнштейна для инвариантных метрик на G/H (рассматриваемых с точностью до комплексного множителя) с учетом алгебраических кратностей этих решений. **Дефектом** называется разность

$$\delta(G/H) := \nu(G/H) - \varepsilon(G/H); \quad \delta(G/H) \geq 0.$$

Числа $\delta(G/H)$ и $\nu(G/H)$ можно находить и без явного отыскания решений. А именно, ν является приведенным объемом многогранника Ньютона, а δ иногда удается получать, исследуя асимптотические решения, соответствующие граням этого многогранника. При $\nu > 0$ асимптотические решения отсутствуют если и только если $\delta = 0$; если они отсутствуют или только изолированы, то все настоящие решения изолированы.

Например, для SU_4/T^3 и G_2/T^2 можно явно найти все асимптотические решения и убедиться, что они изолированы (ср. [7, 8]). Исследованием кратностей только асимптотических решений мною доказано, что в этих случаях $\delta = 18$.

Как доказано в [7, §7], для однородного пространства $M = SU_4/T^3$ выполняется

$$\nu = 80, \quad \delta = 18.$$

При этом на M существует одно четырехкратное решение (это стандартная метрика Вана-Циллера) и число попарно различных комплексных решений (здесь и далее с точностью до умножения на скаляр) равно $\varepsilon - 3 = 80 - 18 - 3 = 59$.

Согласно [8, §8], для пяти G_2/T^2 -подобных однородных пространств M вида (1.1) выполняется

$$\nu = 152, \quad \delta = \begin{cases} 18, & M = G_2/T^2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Во всей пяти случаях число инвариантных метрик Кэлера-Эйнштейна равно половине от числа камер Вейля системы G_2 , т.е. 6, а число комплексных решений, допускающих хотя бы одно отражение из группы Вейля, равно 44 (сверх того, все решения изолированы). В случае $M = G_2/T^2$ подсчет, основанный на предположении об однократности остальных комплексных решений, и некоторые элементарные аргументы, дают $k = 14$ шестиэлементных орбит группы Вейля:

$$k = \frac{1}{6}(\nu - 50 - \delta) = \frac{1}{6}(152 - 50 - 18) = 14$$

В заключение приведем теорему о дефекте из [6, 7]:

Теорема 1.4. Пусть G — компактная простая группа Ли ранга $n \geq 2$, T^n — ее максимальный тор, $M = G/T^n$. Тогда или $\nu(M) \neq \mathcal{E}(M)$, или $M = \mathrm{SU}_3/T^2$.

Доказательство теоремы, данное в [7], требует отдельного рассмотрения случаев SU_4/T^3 , Sp_2/T^2 ([7, §7]) и G_2/T^2 (см. [8, §8] или ниже, §3). Неравенство $\delta(G_2/T^2) > 0$ можно доказать очень просто, не вычисляя явно $\nu(G_2/T^2)$ и $\mathcal{E}(G_2/T^2)$, а тем более, не решая уравнения Эйнштейна.

Содержание этой статьи следующее. В §2 приводится классификация комплексных решений уравнения Эйнштейна для инвариантных метрик на SU_4/T^3 , включающая классификацию Сакане вещественных метрик Эйнштейна. В §3 перепечатан раздел из диссертации [8], касающийся пяти однородных пространств M вида (1.1) и факторпространств M/σ , где σ соответствует отражению из группы Вейля $W(G_2)$. Вначале приводятся формулировки. В §§3.1–3.3 доказано, что $\delta(M/\sigma) = 0$, $\nu(M/\sigma) = 16$. Для сравнения анализируются фактор SU_4/T^3 по инволюции и другие однородные пространства с общим многогранником Ньютона P_{12} (трехмерная призма). Для них $\delta = 0$, $\nu = 12$. В §3.4 доказано, что $\nu(M) = 152$, а в §3.6 — что $\delta(G_2/T^2) > 0$. В добавлениях к §3 строятся 16 (комплексных) эйнштейновых метрик на каждом пяти пространствах M/σ , среди которых есть вещественные положительно определенные; в случае $M = G_2/T^2$ получаются положительно определенные метрики Сакане–Арванитойеоргоса–Хрисикоса.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ МЕТРИК НА SU_4/T^3

Далее под гомотетией понимается умножение метрики на скаляр. Используются обозначения для метрик из [6, 7]. Касательное расслоение к SU_4/T^3 расщепляется на 6 неприводимых инвариантных подрасслоений. Отсюда каждая инвариантная метрика на SU_4/T^3 задается естественными координатами $t_{ij} = t_{ji}$, $1 \leq i < j \leq 4$.²⁾

Применяя полученную в [7, §7.3] формулу дефекта к пространству $M = \mathrm{SU}_4/T^3$, находим $\delta_M = 18$, откуда $\mathcal{E}(M) = 80 - 18 = 62$. Как отмечалось, без учета кратностей существует не 62, а 59 гомотетических классов (г.к.) инвариантных комплексных метрик Эйнштейна в M . А именно, г.к. двадцати девяти положительно определенных и тридцати мнимых метрик

С точностью до гомотетии и изометрии на $M = \mathrm{SU}_4/T^3$ существуют четыре положительно определенные инвариантные метрики Эйнштейна g_t^M , а вовсе не три, как утверждается в [4, таблица 1] со ссылкой на работу Ю.Сакане. Достаточно их классифицировать с точностью до гомотетии и до правого действия в M группы Вейля S_4 (так как по теореме Онищика [9] связная компонента группы всех изометрий инвариантной метрики на M совпадает с PSU_4). Следующие четыре римановы метрики попарно неэквивалентны:

- (i) метрика Кэлера–Эйнштейна с координатами $t_{ab} = b - a$, $1 \leq a < b \leq 4$;
- (ii) стандартная метрика Вана–Циллера с координатами $t_{ab} = 1$, $1 \leq a < b \leq 4$;
- (iii) метрика Арванитойеоргоса: $t_{ij} = 5$, $t_{k4} = 3$ при $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$;
- (iv) риманова метрика вида $t_{12} = (2 + 3 \cdot \theta)(7 - 12 \cdot \theta)/(17 - 6 \cdot \theta)$, $t_{34} = 2/3 + \theta$, $t_{23} = t_{13} = 1 + \eta$, $t_{14} = t_{24} = 1 - \eta$, где $\eta = (\theta + 2/3)\sqrt{(5 + 3 \cdot \theta)/(34 - 12 \cdot \theta)}$, а

²⁾ Содержание этого раздела в основном соответствует примечанию при корректуре из [8]

$\theta = \theta_1 \approx -0.028$ — действительный корень приводимого над полем $\mathbb{Q}(l)$, где

$$l^3 = 3\sqrt{57} \pm 1 = 3\sqrt{A(6, 2)} \pm 1,$$

кубического уравнения $f(\theta) = 2/27 + 8/3 \cdot \theta + \theta^3 = 0$.

Следующие три мнимые комплексные метрики попарно неэквивалентны: метрики (v) и (vi) вида (iv), отвечающие мнимым корням $\theta = \theta_2, \theta_3$ многочлена $f(\theta)$, где $|\theta_2/\theta_1| \approx 59$; метрика (vii) с координатами $t_{12} = \overline{t_{34}} = (4 + \sqrt{-2})/3$ и $t_{ij} = t_{k4} = 1$ в остальных случаях.

Из предложения 7.1 в [7] следует, что каждую инвариантную комплексную метрику Эйнштейна в M можно перевести в одну и только одну из метрик (i)-(vii) действием группы S_4 и умножением на скаляр, т.е. существует $59 = 29 + 30 = (12 + 1 + 4 + 12) + (12 + 12 + 6)$ г.к., состоящих из метрик Эйнштейна. Уравнение Эйнштейна [7, Eq. (1.1)] для метрик (i)-(vii) можно проверить элементарно, причем г.к. метрики (ii) является его четырехкратным решением. Осталось воспользоваться неравенством $\mathcal{E}(M) \leq 62 = 59 + 3$.

Выяснилось, что в упомянутой работе Ю.Сакане (см. [10]) в явной но громоздкой форме построена метрика (iv) и указано, что этот случай ранее рассматривал R.Senda.

Судя по [4, таблица 1], существование инвариантных "римановых неэлементарных" метрик Эйнштейна в G_2/T^2 было открытым вопросом. Теперь они найдены на всех флаговых пространствах с системой T -корней типа G_2 , т.е. на $G_2/T^2, E_6/T^2(A_2)^2, E_7/T^2 A_5, E_8/T^2 E_6, F_4/T^2 A_2$. Следующий текст продолжает [7] и использует те же обозначения.

§ 3. ФЛАГОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА С СИСТЕМОЙ T -КОРНЕЙ ТИПА G_2

Пусть M — флаговое пространство SU_4/T^3 или G_2/T^2 , и W — его группа Вейля, действующая на M справа, $\sigma \in W$ — отражение системы корней типа A_3 или G_2 .

Предложение 3.1. *Для флаговых пространств $M = SU_4/T^3$ и G_2/T^2 соответственно имеем $\mathcal{E}(M/\sigma) = \nu(M/\sigma) = 12$ и 16.*

Пусть $M = G/H$ — флаговое пространство (ф.п.), Ω — его система T -корней, $W = \text{Norm}_G(H)/H$ — его группа Вейля, действующая на M справа, $\sigma \in W$ — элемент, индуцирующий отражение системы Ω , и M/σ — факторпространство по группе $\langle \sigma \rangle$.

Предложение 3.2. *Если Ω является системой корней типа G_2 , то*

$$\mathcal{E}(M/\sigma) = \nu(M/\sigma) = 16.$$

Предложения 3.1 и 3.2 следуют из лемм, которые будут доказаны в пп. 3.1–3.3.

Существует пять флаговых пространств M с системой T -корней типа G_2 :

$$G_2/T^2, F_4/T^2 A_2, E_6/T^2(A_2)^2, E_7/T^2 A_5, E_8/T^2 E_6, \quad (3.1)$$

где подгруппа A_5 группы E_7 не содержится в подгруппах типа A_6 . Каждому из этих ф.п. соответственно можно сопоставить единственную схему Дынкина:

$$\bullet \Leftarrow \bullet, \quad \circ \circ \Leftarrow \bullet \bullet, \quad \circ \circ \bullet \circ \circ, \quad \circ \circ \circ \circ \bullet \bullet, \quad \bullet \bullet \circ \circ \circ \circ \circ.$$

Следовательно, каждое из них имеет единственную, с точностью до изоморфизма, комплексную форму C . Как и вообще для ф.п. [1], формы C однозначно соответствуют

камерам системы Ω . Поскольку Ω является системой корней, эти камеры совпадают с классическими камерами Вейля. Следовательно, группа W индуцирует в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\Omega$ группу линейных преобразований, сохраняющую систему корней типа G_2 и транзитивную на множестве камер Вейля; т.е. всю группу Вейля этой системы корней. Это доказывает существование σ для каждого из пространств (3.1).

Многогранник Ньютона $P = P(G_2)$ пространств (3.1) является одним из многогранников $P(\Omega)$, где Ω — система корней, заданных общей формулой [7, (0.1)]. Он будет изучен в пп. 3.4–3.5.

Предложение 3.3. *Для каждого флагового пространства M вида (3.1) число Ньютона $\nu(M)$ выражается формулой*

$$\nu(M) = 152. \quad (3.2)$$

Доказательство приводится в п. 3.4.

В п. 3.6 доказано неравенство $\mathcal{E}(G_2/T^2) < \nu(G_2/T^2)$.

Дефект $\delta_M = \nu(M) - \mathcal{E}(M)$ можно найти независимо от (3.2).

Предложение 3.4. *Для каждого флагового пространства M вида (3.1) имеем:*

$$\nu(M) - \mathcal{E}(M) = 0 \quad \text{при } M \neq G_2/T^2, \quad (3.3)$$

$$\nu(M) - \mathcal{E}(M) = 18 \quad \text{при } M = G_2/T^2. \quad (3.4)$$

Пространство $M = G_2/T^2$ обладает положительным дефектом $\nu(M) - \mathcal{E}(M)$, накопленным в 12 сжатых однородных пространствах M_γ , соответствующих квадратным граням γ многогранника Ньютона P .

Хотя доказательство предложения 3.4 в принципе не сложно и не громоздко, объем настоящей работы все же не позволяет его включить.

В следующих замечаниях M — флаговое пространство вида (3.1).

Замечание 3.5. Число г.к. положительно определенных инвариантных метрик Эйнштейна в M/σ равно 2 при $M = G_2/T^2$ и 6 в остальных четырех случаях (см. добавление). Обратные образы этих метрик заведомо не являются метриками Кэлера–Эйнштейна по отношению к какой либо инвариантной комплексной структуре J на M .

Замечание 3.6. Комплексные метрики Эйнштейна на M/σ смотри в добавлении 2 в конце раздела. Из их обратных образов действием группы W получается $2 + 3 \times 14 = 44$ г.к. метрик на M . Присоединяя метрики Кэлера–Эйнштейна относительно различных J , получаем 50 г.к. комплексных инвариантных метрик Эйнштейна на M .

Пусть k — число остальных таких метрик Эйнштейна на M с точностью до гомотетий и до действия группы W . Приняв гипотезу об однократности всех решений, нетрудно доказать, что $6k = \nu(M) - 50 - \delta_M$. Тогда в силу (3.2) и (3.4)

$$k = \frac{1}{6} (152 - 50 - 18) = 14 \quad \text{при } M = G_2/T^2.$$

Замечание 3.7. Для доказательства предложения 3.4 надо прежде всего описать грани многогранника Ньютона P . Можно показать, что P имеет 15 двумерных квадратных

граней, три из которых отвергаются по признаку [7, Test 7.2 (§7.1)]. Все грани в форме пирамиды можно отвергнуть по признаку [7, Test 7.1]. Анализ оставшихся граней сводится к 8 случаям, каждый из которых можно разобрать коротко и элементарно. В результате все не квадратные грани отвергаются.

Для доказательства равенства (3.4) рассматривалось торическое многообразие \tilde{V} (см. [7, замечание 3.5]) и некоторые из его одноорбитных стратов, а именно, (неособые) страты, соответствующие 12 квадратным граням. Оценка $\delta_M \geq 18$ при $M = G_2/T^2$ следует из простых и достаточно общих соображений, а все необходимое для доказательства равенства $\delta_M = 18$ (после некоторой подготовки) обнаруживается на одном развороте книги [2, гл. 1, §9.7, с.128].

3.1. Инварианты де Зибенталя пространств M/σ . (См. [7, Proposition 2.4, Example 1.1]). Найдем инварианты де Зибенталя однородных пространств M/σ , где $M = SU_4/T^3$ или M — любое из пяти флаговых пространств (3.1). Отсюда получим соответствующие многогранники Ньютона и числа Ньютона.

Фиксируем тетраэдр Δ_3 , вершину $\beta \in \Delta_3$ и симметрию $\tau \in O(3) : \Delta_3 \rightarrow \Delta_3$ такую, что $\tau(\beta) = \beta$ и $\tau^2 = e$. Очевидно, τ — отражение.

Определим тройные отношения $T A_3$ и $T G_2$ на множестве I неориентированных ребер тетраэдра условиями "ребра образуют треугольник" и "ребра образуют треугольник или три ребра пересекаются в точке β ".

Пусть $I = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, где ребра β_i выходят из вершины β . Тогда

$$T A_3 = \text{Sym}\{(\beta_1, \beta_2, \gamma_3), (\beta_1, \gamma_2, \beta_3), (\gamma_1, \beta_2, \beta_3), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\}, \quad (3.5)$$

$$T G_2 = \text{Sym}\{(\beta_1, \beta_2, \gamma_3), (\beta_1, \gamma_2, \beta_3), (\gamma_1, \beta_2, \beta_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3), (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\}, \quad (3.6)$$

где Sym означает переход к симметричному множеству троек.

Лемма 3.8. Пусть $M = SU_4/T^3$ или G_2/T^2 . Тогда (a) неприводимые компоненты представлений изотропии пространства M можно занумеровать шестью ребрами $\beta_i, \gamma_i \in I$ так, что $\sigma|_I = \tau$, а инвариант де Зибенталя для M записывается в виде (3.5) или (3.6) соответственно;

(b) инварианты де Зибенталя пространств M/σ имеют соответственно вид:

$$T = \text{Sym}\{(a', b', b), (a, b', b'), (a, b, b)\}, \quad (3.7)$$

$$T = \text{Sym}\{(a', b', b), (a, b', b'), (a', b', b'), (a, b, b)\}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Обозначим пары противоположных корней в системах A_3 и G_2 через $\beta(i) = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_4)\}$, где $i = 1, 2, 3$, и $\gamma(i) = \{\pm(\varepsilon_j - \varepsilon_k)\}$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Здесь $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$. Предполагается, что $\varepsilon_4 = 0$ в случае системы G_2 . Без потери общности, σ переставляет друг с другом $\beta(1)$, $\beta(2)$ и $\beta(3)$. Положив $\beta_i = \beta(i)$, $\gamma_i = \gamma(i)$, $i = 1, 2, 3$, получаем (a). Выведем (b) из (a). Пусть $\tau(\beta_1) = \beta_1$, $\tau(\gamma_1) = \gamma_1$, $\tau(\beta_2) = \beta_3$, $\tau(\gamma_2) = \gamma_3$. Обозначим через $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ ортогональное дополнение подалгебры изотропии относительно формы Киллинга. Его разложение на неприводимые модули группы изотропии однородного пространства M/σ имеет вид

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a + \mathfrak{m}_b + \mathfrak{m}_{a'} + \mathfrak{m}_{b'},$$

где $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_{\gamma(1)}$, $\mathfrak{m}_b = \mathfrak{m}_{\gamma(2)} + \mathfrak{m}_{\gamma(3)}$, $\mathfrak{m}_{a'} = \mathfrak{m}_{\beta(1)}$, $\mathfrak{m}_{b'} = \mathfrak{m}_{\beta(2)} + \mathfrak{m}_{\beta(3)}$. Подставляя в (3.5) и (3.6) a вместо $\gamma(1)$, b вместо $\gamma(2)$ и $\gamma(3)$, a' вместо $\beta(1)$, b' вместо $\beta(2)$ и $\beta(3)$, получаем

инварианты де Зибенталя T/σ пространств M/σ в виде (3.7) и (3.8):

$$\begin{aligned} T A_3/\sigma &= \text{Sym}\{(a', b', b), (a', b, b'), (a, b', b'), (a, b, b)\}, \\ T G_2/\sigma &= \text{Sym}\{(a', b', b), (a', b, b'), (a, b', b'), (a', b', b'), (a, b, b)\}. \end{aligned}$$

Это доказывает (b) леммы. \square

Аналогично имеем :

Лемма 3.9. Пусть M — флаговое пространство с системой T -корней типа G_2 (т.е. любое из пяти флаговых пространств (3.1)). Тогда инварианты де Зибенталя для M и M/σ соответственно имеют вид (3.6) и (3.8).

3.2. Трехмерные многогранники P_{12} и P_{16} . Опишем трехмерные многогранники P_{12} и P_{16} в \mathbb{R}^4 — многогранники Ньютона однородных пространств M/σ . На этот раз для удобства обозначим стандартный базис пространства \mathbb{R}^4 через $\{a, a', b, b'\}$. Рассмотрим следующие семь точек в \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} A &= -a, & B &= b' - b - a', & C &= b - a' - b' \\ D &= a' - b - b', & E &= a - 2b, & F &= a - 2b' & G &= a' - 2b' \end{aligned}$$

Обозначим через P_{12} призму с треугольными основаниями (A, B, C) и (D, E, F) . Постоим над ее квадратной гранью (D, A, C, F) пирамиду P_4 с вершиной $G \notin P_{12}$.

Обозначим через $P_{16} = P_{12} \cup P_4$ выпуклую оболочку всех семи точек A, \dots, G (Рис. 3). Многогранник P_{16} комбинаторно устроен так же, как выпуклая оболочка семи вершин куба; он имеет семь вершин и семь двумерных граней, а именно, три четырехугольные и четыре треугольные грани:

$$(A, B, E, D), (D, E, F, G), (B, C, F, E), (A, B, C), (A, C, G), (A, D, G), (C, F, G).$$

Из определений следует:

Лемма 3.10. Построенные многогранники P_{12} и P_{16} являются многогранниками Ньютона однородных пространств класса **a** (см. [7, §2.4]) с инвариантами де Зибенталя (3.7) и (3.8) соответственно.

Доказательство. Лемма следует из включений $S \subset P_{12} \subset P_{16}$, где S — стандартный симплекс в \mathbb{R}^4 , т.е. симплекс с вершинами $-a, -a', -b, -b'$. \square

Следствие 3.11. $P_{M/\sigma} = P_{12}$ для $M = SU_4/T^3$; $P_{M/\sigma} = P_{16}$ для $M = G_2/T^2$ и остальных флаговых пространств (3.1).

Лемма 3.12. Приведенные объемы $\nu(P)$ многогранников P_{12} и P_{16} равны 12 и 16.

Доказательство. Натянем на многогранники трехмерное аффинное пространство $D = \{x \in \mathbb{R}^4 : \sum x_i = -1\}$. Существует куб Q в D со стороной евклидовой длины 2 такой, что $Q \supset P_{12}$. Имеем $\nu(Q) = 3 \cdot 2^3 = 2\nu(P_{12})$, откуда $\nu(P_{12}) = 12$. Приведенный объем трехмерной пирамиды в D выражается необычной формулой

$$\nu = h \sigma,$$

где h — высота пирамиды и σ — евклидова площадь основания. Для пирамиды P_4 имеем $\sigma = 2 \times 2$ и $h = 1$, поскольку $2h$ — диагональ квадрата $(D, G, F, \frac{E+F}{2})$ со стороной $\sqrt{2}$. Значит, $\nu(P_{16}) = \nu(P_{12}) + \nu(P_4) = 12 + 4$. \square

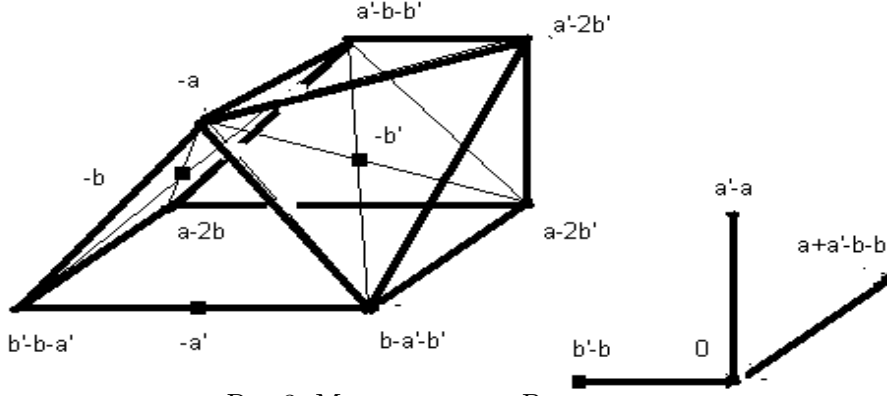


Рис.3. Многогранник P_{16} и естественный ортогональный репер в точке $-a' \in P_{16}$.

3.3. Однородные пространства с трехмерными многогранниками P_{12} и P_{16} .

Лемма 3.13. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство с однократным спектром представления изотропии, с многогранником Ньютона $P = P_{12}$ или P_{16} . Тогда группа G полупроста, M содержится в классе \mathbf{a} , определенном в [7, §2.4]. Равенство

$$\mathcal{E}(M) = \nu(P) = 12, 16$$

эквивалентно $[\mathbf{m}_{a'}, \mathbf{m}_{a'}] \neq 0$ и следует из $[\mathbf{m}_{a'}, \mathbf{h}] \neq 0$.

Доказательство. Из включений $S \subset P_{12} \subset P_{16}$ следует, что группа Ли G полупроста (в силу [7, §1.6, замечание 1.1, 2]) и, более того, M содержится в классе \mathbf{a} (в силу [7, предложение 2.2]). Пусть $t = (t_a, t_b, t_{a'}, t_{b'})$ — естественные координаты инвариантной комплексной метрики в M такие, как в [7, пример 1.1], а $s(t)$ — скалярная кривизна. Носитель $\text{supp}(s)$ лорановского многочлена $s(t)$ состоит из вершин многогранника P и точек $-a', -b, -b' \in P$ ([7, предложение 2.4]).

Существует единственное ребро γ с центром в точке носителя. Это ребро $\gamma = (BC)$ с центром $-a' \in \text{supp}(s)$ отвергается (в смысле [7, §7.1]) при $[\mathbf{m}_{a'}, \mathbf{m}_{a'}] \neq 0$ по признаку [7, Test 7.2].

В соответствии с [7, §7.1], проверим, что отвергаются все остальные p -грани $\gamma \subset P$, $0 < p < \dim(P)$, и тем самым докажем лемму. Как видно из чертежа, все треугольные грани γ и все ребра $\gamma \neq (BC)$ отвергаются по признаку [7, Test 7.1]. Осталось рассмотреть три четырехугольные грани $\gamma \subset P$, где $P = P_{12}$ или P_{16} .

Случай 1). Пусть $\gamma = (A, B, E, D)$ — квадратная грань, $P = P_{12}$ или P_{16} . Тогда

$$\varphi(t) := t_b s_\gamma(t) = A t^{b-a} - E t^{a-b} - B t^{b'-a'} - D t^{a'-b'} + K, \quad B = D.$$

(на этот раз мы обозначаем через A, B , и т.д. не вершину многогранника P , а соответствующий коэффициент многочлена $\pm s(t)$). Функция φ существенно зависит от $2 = \dim(\gamma)$ переменных. Переходя от четырех переменных t_i к двум новым переменным x, y , получаем

$$\varphi(x, y) = A x^{-1} - E x - B(y^{-1} + y) + K.$$

Случай 2). Пусть $\gamma = (B, C, E, F)$ – прямоугольная грань, $P = P_{12}$ или P_{16} . Тогда для двух подходящих переменных x, y

$$\varphi(t) := -t_{a'} s_\gamma(t) = By^{-1} + Cy + Exy^{-1} + Fxy - L, \quad B = C.$$

Случай 3). Пусть $\gamma = (D, E, F, G)$ – трапеция, $P = P_{16}$. Тогда для двух подходящих переменных x, y

$$\varphi(t) := t^{-(a-b-b')} s_\gamma(t) = -Ey^{-1} - Fy - Dx - Gxy.$$

Покажем, что в каждом из этих трех случаев комплексная кривая Y_γ в $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$, заданная уравнением $\varphi(x, y) = 0$, $x, y \neq 0$, является неособой. Пусть

$$z = \partial\varphi(x, y)/\partial x, \quad \psi = \varphi - xz.$$

В случае 1) имеем $z = -Ax^{-2} - E$, т.е. $x^{-2} = -(z + E)/A$. Из $\partial\varphi(x, y)/\partial y = 0$ следует $y^2 = 1$. Тогда $\psi(x, y) = 2Ax^{-1} \pm 2B + K$,

$$l_1 := \psi(x, y) \psi(-x, y) = (K \pm 2B)^2 - 4A^2x^{-2} = (K \pm 2B)^2 + 4AE + 4Az.$$

В случае 2) имеем $z = Ey^{-1} + Fy$, $\psi(x, y) = By^{-1} + By - L$. Значит, $Ey^{-2} = -F + y^{-1}z$, $Fy^2 = -E + yz$,

$$l_2 := \psi(x, y) \psi(x, -y) = L^2 - B^2(y^{-2} + y^2 + 2) = L^2 + B^2(F/E + E/F - 2) - (B^2/EF)(Fy^{-1} + Ey)z$$

В случае 3) имеем $z = -D - Gy$, т.е. $y = -(D + z)/G$, $y^{-1} = -(y^{-1}z + G)/D$,

$$l_3 := \psi(x, y) = -Ey^{-1} - Fy = (GE/D + DF/G) + ((E/D)y^{-1} + F/G)z.$$

Здесь A, K, L – коэффициенты многочлена $s(t)$ соответственно при $t_a^{-1} = t^{-a}$, $t_b^{-1} = t^{-b}$ и $t_{a'}^{-1} = t^{-a'}$. Из компактности M следует, что они неотрицательны ([7, лемма 5.3, 2]) (срав. также с формулой Вана-Циллера в [7, пример 1.1]). Тогда $A, K, L > 0$ в силу [7, предложение 2.4] о носителе многочлена $s(t)$. Имеем:

$$A, B, C, D, E, F, G, K, L > 0,$$

следовательно, выполняются дискриминантные неравенства

$$(K \pm 2B)^2 + 4AE > 0, \quad EFL^2 + B^2(E - F)^2 > 0, \quad EG^2 + FD^2 > 0,$$

в силу которых $l_1, l_2, l_3 > 0$ при $z = 0$. Поэтому кривые Y_γ не имеют особых точек, и грани $\gamma = (A, B, E, D)$, (B, C, E, F) , (D, E, F, G) отвергаются.

Случай 3а). Грань (D, A, C, F) призмы P_{12} (содержащая внутреннюю точку $-b'$ многогранника P_{16}) рассматривается точно так же, как грань (A, B, E, D) в P_{12} , и так же отвергается. Лемма доказана. \square

Замечание 3.14. Для того, чтобы однородное пространство $M = G/H$ компактной полупростой группы Ли G с инвариантом (3.7) или (3.8) соответственно имело многогранник Ньютона $P = P_{12}$ или P_{16} , достаточно, чтобы выполнялось $[\mathfrak{m}_a, \mathfrak{h}] \neq 0$.

Приведем другие примеры однородных пространств с инвариантом (3.7).

Пример 3.15. Инвариантом де Зибенталя следующих однородных пространств является тройное отношение (3.7):

1) односвязные пространства ³⁾

$$E_7/T^1 \cdot A_1 \cdot A_1 \cdot D_4, \quad E_8/T^1 \cdot A_1 \cdot D_6, \quad F_4/T^1 \cdot A_1 \cdot B_2;$$

2) три серии (где $l=m'+n+m$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_l/\mathrm{Sp}_{m'} \times \mathrm{U}_n \times \mathrm{Sp}_m \quad (1 \leq m \leq m'), \quad \mathrm{SO}_{2l}/\mathrm{SO}_{2m'} \times \mathrm{U}_n \times \mathrm{SO}_{2m} \quad (2 \leq m \leq m'), \\ \mathrm{SO}_{2l+1}/\mathrm{SO}_{2m'} \times \mathrm{U}_n \times \mathrm{SO}_{2m+1} \quad (0 \leq m, \quad 2 \leq m'), \end{aligned}$$

3) серия пространств G/H с $\mathrm{rank}(G) > \mathrm{rank}(H)$:

$$G/H = \mathrm{SU}_n/\mathrm{S}(\mathrm{Sp}_{n_1} \cdot T^1 \times \mathrm{U}_{n_2} \times \mathrm{U}_{n_3}) \quad (n = 2n_1 + n_2 + n_3).$$

(В пп.1) и 2) перечислены все p -симметрические пространства внутреннего типа с системой S -корней $\overline{BC_2}$, см. [8, 0.3.9]). Пространства 1), 2), 3) имеют многогранник Ньютона P_{12} .

Из лемм вытекает :

Следствие 3.16. $\mathcal{E}(M/\sigma) = \nu(M/\sigma) \in \{12, 16\}$ для $M = \mathrm{SU}_4/T^3$, G_2/T^2 и других флаговых пространств (3.1);

$\mathcal{E}(M) = \nu(M) = 12$ для однородных пространств M , перечисленных в примере 3.15.

Замечание 3.17. Призма $P_{12} = P(\overline{BC_2})$ отличается от рассмотренной в [7, §7.2] призмы $\mathrm{IB} = P(B_2)$. Их можно перевести друг в друга действием группы $GL(4, \mathbb{Z})$ (отсюда равенство объемов). Но это не распространяется на носители $\mathrm{supp}(s)$.

3.4. Число Ньютона $\nu(G_2/T^2)$. Приведем доказательство формулы (3.2), опуская только легко восстанавливаемые подробности. Пусть $P = P(G_2)$ — пятимерный многогранник Ньютона флаговых пространств M с системой T -корней типа G_2 . По определению числа Ньютона имеем

$$\nu = \nu(M) = \frac{5!}{\sqrt{6}} \mathrm{vol}_E(P(G_2)).$$

Здесь $\mathrm{vol}_E(Q)$ — стандартный евклидов объем любого многогранника Q в гиперплоскости $D = \{x \in \mathbb{R}^6 : x_1 + \dots + x_6 = -1\}$. Сравнение формул (3.5) и (3.6) показывает, что $P = P(G_2)$ является выпуклой оболочкой рассмотренного ранее в [7] многогранника Ньютона $\Pi = P(A_3)$ и трех точек. Обозначим эти точки через α_i , $i = 1, 2, 3$. Отождествим $I = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ со стандартным базисом ⁴⁾ в \mathbb{R}^6 . Тогда

$$\alpha_i = \beta_i - \beta_j - \beta_k, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

Обозначим через $\mathcal{C}(Q) = \{q \in \mathbb{R}^6 : \langle p, q \rangle \leq 0 \ \forall p \in Q\}$ двойственный конус для $Q \subset \mathbb{R}^6$. Пусть Γ — фасета многогранника Π и $f \in \mathcal{C}(\Pi) \setminus 0$ — вектор нормали к Γ (параллельный ребру конуса $\mathcal{C}(\Pi)$). При $\langle \alpha_i, f \rangle > 0$ назовем фасету Γ **освещенной** из точки α_i . Из включений $\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j) = -\beta_k \in \Pi$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, легко следует, что P совпадает с объединением многогранника Π и всех пирамид с вершиной α_i , построенных над фасетами, освещенными из точки α_i , $i = 1, 2, 3$, причем эти многогранники образуют разбиение многогранника P , т.е. имеют попарно непересекающиеся внутренности.

³⁾ В [7, §7], подстрочное примечание 11), одно пространство из следующего списка было пропущено ($E_7/T^1 \cdot D_4 \cdot A_1 \cdot A_1$) и приклеились два пространства из другого списка (а именно, особые флаговые пространства с системой T -корней $\Omega = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\} \subset \mathbb{Z}^1$, их многогранник Ньютона — трапеция).

⁴⁾ Здесь от обозначений [7] удобно перейти к новым обозначениям для базиса в \mathbb{R}^6 . В формулах для Π (см. [7, пример 1.4]) можно положить $\mathbf{1}_{ij} = \mathbf{1}_{ji} = \gamma_k$, $\mathbf{1}_{i4} = \beta_i$ при $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

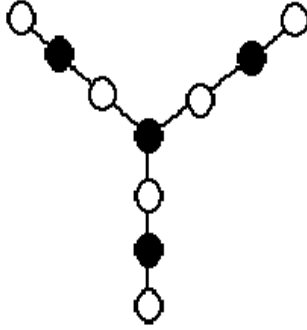


Рис.4. Граф Вана–Циллера пространства G_2/T^2 .
(Вершины графа отвечают подалгебрам \mathfrak{k} , $\mathfrak{k}_2 \subsetneq \mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}_2$)

Пятимерный многогранник $\Pi = P(A_3)$ рассматривался в [7, примеры 1.4, 3.2, 7.7]. Он имеет семь фасет, т.е. двойственный конус $\mathcal{C}(\Pi)$ имеет семь ребер. Эти ребра параллельны следующим характеристикам, т.е. 0, 1-векторам:

$$\chi^0 := \chi_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}, \quad \chi^i = \chi_{\gamma_i, \beta_j, \beta_k}, \quad \varphi^i = \chi_{\gamma_i, \beta_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь χ_S — характеристика с нуль-множеством $S \subset I$, $I = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. вектор χ с координатами $\chi_S(i) = 0$ при $i \in S$, 1 при $i \in I \setminus S$. Для других G/H характеристики χ_S определяются аналогично. Воспользуемся тем, что в общем случае 0, 1-векторы $\chi_S \in \mathcal{C}(P_{G/H})$, и только они, являются характеристиками H -инвариантных подалгебр $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_S \subset \mathfrak{g}$. (ср. [8, следствие 2.0] или [7, §6.1.5]). Например, при $G/H = SU_4/T^3$ имеем $\chi^0, \chi^i, \varphi^i \in \mathcal{C}(\Pi)$, поскольку $P_{G/H} = \Pi$ — многогранник Ньютона пространства SU_4/T^3 , а $\chi^0, \chi^i, \varphi^i$ — характеристики максимальных подалгебр максимального ранга алгебры Ли \mathfrak{su}_4 . При $G/H = G_2/T^2$ имеем $P_{G/H} = P$. Легко видеть, что χ^0, φ^i — характеристики подалгебр \mathfrak{k} особой алгебры Ли \mathfrak{g}_2 . (Структура всех подалгебр алгебры \mathfrak{g}_2 , собственных и собственным образом содержащих $\mathfrak{h} = Lie(T^2)$, является деревом, изображенным на Рис.4, где черными кружками обозначены подалгебры \mathfrak{k} с характеристиками χ^0 и φ^i , $i = 1, 2, 3$, белыми кружками — другие подалгебры \mathfrak{k} , отрезками — включения \subset и \supset между подалгебрами). Следовательно, χ^0 и $\varphi^i \in \mathcal{C}(P) \subset \mathcal{C}(\Pi)$. Значит, фасеты многогранника Π с векторами нормалей χ^0 и φ^i , $i = 1, 2, 3$, лежат на фасетах многогранника P , и потому не освещены. Далее, имеем:

$$\langle \alpha_i, \chi^j \rangle = 2\delta_i^j - 1, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где δ_i^j — символ Кронекера. Следовательно, i -я фасета $\Gamma_i = \{p \in \Pi : \langle p, \chi^i \rangle = 0\}$ многогранника Π освещена из i -й точки α_i , $i = 1, 2, 3$. Обозначим через P_i пирамиду с апексом α_i , построенную на фасете Γ_i . Итак, мы разбили многогранник $P = P(G_2)$ на 4 многогранника с попарно не пересекающимися внутренностями:

$$P(G_2) = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \Pi, \quad \Pi := P(A_3).$$

Нетрудно проверить, что высота h каждой пирамиды P_i равна $\sqrt{6}/3$.

Подсчитаем объем $P(G_2)$. Многогранник Π является евклидовым прямым произведением тетраэдра с ребром 2 и правильного треугольника Δ_2 со стороной 2 (см. [7, пример 1.4]) $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$, откуда, очевидно, $\frac{5!}{\sqrt{6}} \text{vol}_E(\Pi) = 80$ ([7, пример 1.5]). При этом $\Gamma_i = \Delta_2 \times \Delta_2$. Поэтому евклидова площадь основания Γ_i пирамиды P_i равна 3.

Отсюда находим объемы пирамид:

$$\text{vol}_E(P_i) = \frac{3h}{\dim(P_i)} = \frac{\sqrt{6}}{5}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Значит

$$\nu = 3 \cdot 4! + \frac{5!}{\sqrt{6}} \text{vol}_E(\Pi) = 72 + 80 = 152.$$

Формула (3.2) доказана.

3.5. Фасеты многогранника Ньютона $P = P(G_2)$. Продолжим изучение выпуклого пятимерного многогранника $P = P(G_2)$. Найдем его фасеты Γ , проходящие через точку $\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = (0, 0, 0, 1, -1, -1)$. Очевидно, Γ содержит боковую 4-грань пирамиды $P_1 = \text{Conv}(\alpha_1, \Gamma_1)$. Используя равенства

$$\langle \alpha_i, \varphi^j \rangle = -2\delta_i^j, \quad \langle \alpha_i, \chi^j \rangle = 2\delta_i^j - 1, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

находим всего 6 кандидатур для векторов нормалей $f \in \mathcal{C}(P)$ к фасетам $\Gamma \subset P$:

$$f \in \{\varphi^2, \varphi^3, \chi^1 + \chi^2, \chi^1 + \chi^3, \chi^0 + \chi^1, \varphi^1 + 2\chi^1\}.$$

Все они будут векторами нормалей к фасетам многогранника P , поскольку пирамида P_1 заведомо не является 5-симплексом (напомним, что $\Gamma_1 = \Delta_2 \times \Delta_2$).

Предложение 3.18. *Конус $\mathcal{C}(P(G_2))$ имеет 13 ребер. Пять из них порождены векторами*

$$f_1 = (0, 0, 0, 1, 1, 1) = \chi^0 = \chi_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3},$$

$$f_2 = (0, 1, 1, 0, 1, 1) = \varphi^1 = \chi_{\gamma_1, \beta_1},$$

$$f_3 = (2, 1, 1, 0, 1, 1) = \chi^2 + \chi^3,$$

$$f_4 = (0, 1, 1, 2, 1, 1) = \chi^0 + \chi^1 = 2 - f_3,$$

$$f_5 = (0, 3, 3, 2, 1, 1) = \varphi^1 + 2\chi^1,$$

а остальные ребра получаются из ребер $\mathbb{R}_+ f_i$, $i = 2, 3, 4, 5$, действием шестичленной группы линейных преобразований $\gamma_i \mapsto \gamma_{\sigma(i)}$, $\beta_i \mapsto \beta_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, 3$, где $\sigma \in S_3$.

Доказательство. Пусть Γ — фасета многогранника P , нормальная к ребру $\mathbb{R}_+ f$ конуса $\mathcal{C}(P)$. Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \notin \Gamma$. В этом случае $\dim \Gamma \cap \Pi = 4$ и фасета $\Gamma \cap \Pi$ многогранника Π не является освещенной ни из одной точки α_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда, с точностью до множителя, $f = \chi^0$. \square

Следствие 3.19. *Пятимерный многогранник $P = P(G_2)$ в \mathbb{R}^6 имеет 13 фасет, т.е. четырехмерных граней. Равенство $f_4 = 2 - f_3$, т.е. $f_4(i) = 2 - f_3(i)$, $i = 1, \dots, 6$, показывает, что фасеты Γ_{f_i} , $i = 3, 4$, параллельны друг другу.*

3.6. Неравенство для $\mathcal{E}(G_2/T^2)$. Докажем, что $\mathcal{E}(G_2/T^2) < \nu(G_2/T^2)$. Вначале заметим, что аналогичное неравенство для SU_4/T^3 можно доказать, используя любую из 12 двумерных квадратных граней \square многогранника Ньютона $\Pi = \Delta_3 \times \Delta_2$, описанных в [7, §7.3], и приравнивая нулю определитель второго порядка из 7.3.4.

Перенесем этот план на случай G_2/T^2 . Перейдем от $\Pi = P(A_3)$ к многограннику Ньютона $P = P(G_2)$ пространства G_2/T^2 и воспользуемся включением $\Pi \subset P$. Утверждается, что все 12 квадратов $\square \subset \Pi$ являются гранями многогранника P . Для наших

целей достаточно построить любой из них, но мы построим два. ⁵⁾ В силу предложения 3.18 двойственный конус $\mathcal{C}(P)$ содержит следующие три вектора:

$$\begin{array}{lll} (1, 1, 2, 4, 2, 3) & (1, 5, 6, 3, 3, 2) & (0, 5, 5, 5, 4, 4) \\ = (0, 0, 0, 1, 1, 1) & = (0, 1, 1, 0, 1, 1) & = (0, 0, 0, 1, 1, 1) \\ + (1, 0, 1, 1, 0, 1) & + (1, 1, 2, 1, 1, 0) & + (0, 1, 1, 0, 1, 1) \\ + (0, 1, 1, 2, 1, 1) & + (0, 3, 3, 2, 1, 1) & + (0, 1, 1, 2, 1, 1) \\ & & + (0, 3, 3, 2, 1, 1) \end{array}$$

Значит, ортогональное дополнение каждого из них пересекает многогранник P по некоторой грани. Построенные грани лежат в Π , поскольку не содержат вершин $\alpha_i \in P$, $i = 1, 2, 3$, вида $\alpha_i = \beta_i - \beta_j - \beta_k$, например, вершины $\alpha_1 = (0, 0, 0, 1, -1, -1)$. Легко проверяется, что

1. $\Gamma_{(1,1,2,4,2,3)}$ — квадрат вида \square ,
2. $\Gamma_{(1,5,6,3,3,2)}$ — квадрат вида \square ,
3. $\Gamma_{(0,5,5,5,4,4)} = \Gamma_{(0,1,1,1,1,1)}$ — квадрат с центром $-\gamma_1 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0)$, удовлетворяющий признаку [7, Test 7.2] (см. [7, §7.1]).

Условие совместности системы уравнений [7, (1.2)], связанной с гранью \square , имеет вид

$$D = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

где a, b, c, d — коэффициенты многочлена Лорана $s(t)$ при степенях t , соответствующих вершинам грани \square . Из формул для $s(t)$, приведенных в следующем дополнении, вытекает, что в случае G_2/T^2 коэффициенты при всех вершинах многогранника Π (но не P) совпадают, откуда $a = b = c = d$; $D = 0$ в случае G_2/T^2 и $D \neq 0$ для остальных флаговых пространств (3.1). Это доказывает неравенство $\mathcal{E}(G_2/T^2) < \nu(G_2/T^2)$.

Дополнение 1. О пяти особых флаговых пространствах M

Рассмотрим группы изотропии H и запишем многочлены Лорана $s(t)$ для пяти флаговых пространств $M = G/H$ вида (3.1). Тогда H содержится в связной максимальной подгруппе максимального ранга $A_2 \cdot H'$, где $H' = (H, H)$ — ее коммутант, $(A_2, H') = \{e\}$. Поэтому через точку eH в G/H проходит H -инвариантное подпространство $\mathbb{C}P^2 = A_2/T^2$. В нем лежат три H -инвариантных подпространства $\mathbb{C}P^1$, $eH \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$. Их касательные пространства $\mathfrak{m}_{\gamma(1)}$, $\mathfrak{m}_{\gamma(2)}$, $\mathfrak{m}_{\gamma(3)} \simeq \mathbb{R}^2$ являются тремя из шести неприводимых подмодулей H -модуля

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\gamma(1)} + \mathfrak{m}_{\gamma(2)} + \mathfrak{m}_{\gamma(3)} + \mathfrak{m}_{\beta(1)} + \mathfrak{m}_{\beta(2)} + \mathfrak{m}_{\beta(3)}$$

(см. обозначения в доказательстве леммы 3.8, ср. [7, пример 1.1]). Подмодули $\mathfrak{m}_{\gamma(i)}$ отвечают длинным корням системы Ω (которая является системой корней типа G_2). Учитывая симметрии, находим размерности $N_\alpha = \dim(\mathfrak{m}_\alpha)$:

$$N_{\gamma(1)} = N_{\gamma(2)} = N_{\gamma(3)} = 2, \quad N_{\beta(1)} = N_{\beta(2)} = N_{\beta(3)} = N,$$

где $N = (\dim M - 6)/3$.

⁵⁾ Попутно отметим, что любую двумерную нетреугольную грань многогранника P можно перевести в одну и только одну из указанных ниже граней 1–3 посредством группы $S_3 = W_{G_2}/(\pm 1)$.

Для коммутирующих символов x, y, z, x', y', z' введем обозначения

$$((x, y, z)) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}, \quad ((x', y', z')(x, y, z)) = ((x', y, z)) + ((x, y', z)) + ((x, y, z')).$$

Выражение для скалярной кривизны $s(t)$ из [7, Example 1.1] принимает вид

$$\begin{aligned} 2s(t) = & \sum_{i=1}^3 [2t_{\gamma(i)}^{-1} + Nt_{\beta(i)}^{-1}] - \kappa_1((t_{\gamma(1)}, t_{\gamma(2)}, t_{\gamma(3)})) \\ & - \kappa_2((t_{\gamma(1)}, t_{\gamma(2)}, t_{\gamma(3)})(t_{\beta(1)}, t_{\beta(2)}, t_{\beta(3)})) - \kappa_3((t_{\beta(1)}, t_{\beta(2)}, t_{\beta(3)})). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Неравенства (Вана-Циллера) для коэффициентов из [7, Example 1.1] принимают вид

$$1 - \kappa_1 - \kappa_2 > 0, \quad N - 4\kappa_2 - 2\kappa_3 > 0, \quad \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 > 0. \quad (3.10)$$

Обозначим через j индекс Дынкина присоединенного представления группы G . Утверждается, что

$$N = j - 6, \quad \kappa_1 = 2/j, \quad \kappa_2 = 1 - 6/j, \quad \kappa_3 = j/6 - 1, \quad (3.11)$$

при этом $j = 8, 18, 24, 36, 60$ соответственно для $G = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$.

ДОПОЛНЕНИЕ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ МЕТРИК ЭЙНШТЕЙНА В M/σ

Пусть M — любое из флаговых пространств (3.1), W — его группа Вейля.

Нетрудно убедиться, что на факторпространстве M/W существуют две G -инвариантные комплексные метрики Эйнштейна с точностью до гомотетии. Их обратные образы на M имеют координаты $t_{\gamma(1)} = t_{\gamma(2)} = t_{\gamma(3)}$ и

$$t_{\beta(i)}/t_{\gamma(i)} = \frac{1}{60} \left(5j \pm \sqrt{5(j-12)(5j-12)} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

При $M \neq G_2/T^2$ ($j \geq 18$) формула (3.12) задает две не гомотетичные друг другу положительно определенные метрики Эйнштейна.

Перейдем к G -инвариантным метрикам в M/σ . Пусть $t_a = t_{\gamma(1)}$, $t_b = t_{\gamma(2)} = t_{\gamma(3)}$, $t_{a'} = t_{\beta(1)}$, $t_{b'} = t_{\beta(2)} = t_{\beta(3)}$ — естественные координаты в пространстве этих метрик.

Следующая лемма показывает, что коэффициенты каждого не W -инвариантного решения [7, Eq. (1.1)] (с точностью до общего множителя) принадлежат полю алгебраических чисел степени $14 = \dim(G_2)$, а поля для разных решений изоморфны.

Лемма 3.20. *На факторпространстве M/σ существует 14 попарно негомотетичных комплексных метрик Эйнштейна вида*

$$t_{b'}/t_b = x, \quad t_{a'}/t_a = F_1(x), \quad t_{b'}/t_a = F_2(x), \quad F_i(x) \in \mathbb{Q}(x),$$

где $x \in \{x_1, \dots, x_{14}\}$ — корень неприводимого многочлена 14 степени $f_{14}(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Лемма проверяется прямым вычислением с помощью программы MAPLE.

Приведем выражения для $M = G_2/T^2$ (т.е. для $j = 8$).

$$\begin{aligned} f_{14}(x) = & 2302911 x^{14} - 10589454 x^{13} + 25929072 x^{12} - 40992642 x^{11} + 40560939 x^{10} \\ & - 19334556 x^9 - 8129184 x^8 + 21916564 x^7 - 17302275 x^6 + 5385490 x^5 \\ & + 2042208 x^4 - 2822162 x^3 + 1247577 x^2 - 244584 x + 32400 \end{aligned}$$

Выражения $y = F_1(x)$ и $w = F_2(x)$ ($j = 8$). Представления многочленами степени ≤ 13 от x .

$$y := -\frac{175010896509363118040086341}{5631737006960999042017600}x^{13} + \frac{760112877954361925067757749}{5631737006960999042017600}x^{12} - \frac{1750144201826669628973688007}{5631737006960999042017600}x^{11} + \frac{2511833210232128226813555927}{5631737006960999042017600}x^{10} - \frac{1003878467681567742016705967}{2815868503480499521008800}x^9 + \frac{240879181713958481246898829}{8447605510441498563026400}x^8 - \frac{7403781632071474402565699143}{27594158203874223011049838409}x^7 - \frac{25342816531324495689079200}{76028449593973487067237600}x^6 + \frac{410494638054286810285781003}{330826078483182090005453261}x^5 - \frac{2027425322505959655126336}{30411379837589394826895040}x^4 - \frac{3445072458977611467519796207}{7587084783582358318419111269}x^3 + \frac{50685633062648991378158400}{152056899187946974134475200}x^2 - \frac{32695109346932045297414717}{185143322469969876688236}x + \frac{2111901377610374640756600}{87995890733765610031525}$$

$$w := -\frac{1576346706064295403636224151}{31537727238981594635298560}x^{13} + \frac{2988198723955016496597743277}{15768863619490797317649280}x^{12} - \frac{13285340740238310997510265217}{31537727238981594635298560}x^{11} + \frac{9257614313874971696870033121}{15768863619490797317649280}x^{10} - \frac{22633930581543413268015570611}{8149391014299901771067458001}x^9 + \frac{47306590858472391952947840}{70959886287708587929421760}x^8 - \frac{99118813229806384154825380279}{203481616765900685799134222281}x^7 - \frac{425759317726251527576530560}{638638976589377291364795840}x^6 + \frac{31059759863976878968413569399}{4071162105662468344325556835}x^5 - \frac{170303727090500611030612224}{255455590635750916545918336}x^4 - \frac{39868741658792538217841910131}{43885565296005598812277067281}x^3 + \frac{851518635452503055153061120}{1277277953178754582729591680}x^2 - \frac{474728963794058513671615399}{4723023511792833377635441}x + \frac{53219914715781440947066320}{2956661928654524497059240}$$

Представления в виде дробей.

$$y = -3((x-1)(26244x^{10} - 107163x^9 + 247860x^8 - 349983x^7 + 294081x^6 - 116321x^5 - 38995x^4 + 81535x^3 - 52221x^2 + 16668x - 2025))/(-2700 - 1368x - 25878x^3 + 27987x^2 + 19683x^{10} - 223074x^9 + 481140x^8 - 327186x^7 - 114246x^6 + 289122x^5 - 123224x^4)$$

$$w = -\frac{1}{8}(137781x^{11} - 216513x^{10} + 355752x^9 - 943434x^8 + 1340712x^7 - 1027572x^6 + 374878x^5 + 60690x^4 - 212989x^3 + 209829x^2 - 96102x + 16200)/(-2700 - 1368x - 25878x^3 + 27987x^2 + 19683x^{10} - 223074x^9 + 481140x^8 - 327186x^7 - 114246x^6 + 289122x^5 - 123224x^4)$$

Замечание 3.21. Введем в пространстве гомотетических классов инвариантных метрик в M/σ координаты $x = t_{b'}/t_b$, $y = t_{a'}/t_a$, $w = t_{b'}/t_a$ (см. Рис.3). Система [7, Eq. (1.1)]

после исключения конформных множителей становится системой уравнений относительно x, y, w . Программа MAPLE решила ее за секунду с четвертью (понадобилось еще время на обработку решений).

Дополнение 3. Положительно определенные Эйнштейновы метрики на M/σ

Пусть снова M — любое из флаговых пространств (3.1).

Предложение 3.22. (a) На пространстве M/σ существуют положительно определенные G -инвариантные метрики Эйнштейна. Число этих метрик с точностью до гомотетии равно 2 при $M = G_2/T^2$ (т.е. при $j = 8$), и 6 в остальных случаях.
(b) Положительно определенные (соответственно, вещественные индефинитные) инвариантные метрики Эйнштейна в M/σ , отличные от метрик (3.12), отвечают положительным (соответственно, отрицательным) корням неприводимого многочлена $f_{14}(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
(c) Отрицательные корни $f_{14}(x)$ существуют только при $j \in \{36, 60\}$ (их по два).

Схема доказательства. То, что вещественные метрики из (b) отвечают вещественным корням $f_{14}(x)$, следует из леммы 3.20 и предложения 3.2. Далее, можно проверить, что минимальными многочленами $\varphi_i(y) \in \mathbb{Q}[y]$ элементов $y_i = F_i(x) \in \mathbb{Q}[x]/(f_{14}(x))$, $i = 1, 2$, являются некоторые многочлены 14 степени со знакопередающимися коэффициентами ⁶⁾. Например, при $j = 8$:

$$\begin{aligned}\varphi_1(y) &= 8290479600 y^{14} - 52700208984 y^{13} + 538432220079 y^{12} - 1618143182406 y^{11} \\ &\quad + 2697711175278 y^{10} - 3407189361930 y^9 + 3519687897648 y^8 - 2757517036290 y^7 \\ &\quad + 1539019875362 y^6 - 602718526838 y^5 + 166447276569 y^4 - 32207378760 y^3 \\ &\quad + 4184043012 y^2 - 327367656 y + 11573604, \\ \varphi_2(w) &= 1658095920 w^{14} - 10281139488 w^{13} + 29764527624 w^{12} - 53875631088 w^{11} \\ &\quad + 68589182916 w^{10} - 65344826088 w^9 + 48093022782 w^8 - 27694511532 w^7 \\ &\quad + 12514329552 w^6 - 4426523804 w^5 + 1212637473 w^4 - 251395110 w^3 \\ &\quad + 37706553 w^2 - 3645000 w + 170586.\end{aligned}$$

Поэтому $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ не имеют отрицательных корней, что доказывает (b). В следующем списке приводятся приближенные значения всех вещественных корней x_i многочлена $f_{14}(x)$ при различных j :

- 1) $j = 8$, $x_1 = 1.0234$, $x_2 = 1.0347$,
- 2) $j = 18$, $x_1 = .3927$, $x_2 = .4506$, $x_3 = .8181$, $x_4 = 2.562$,
- 3) $j = 24$, $x_1 = .3547$, $x_2 = .4174$, $x_3 = .7419$, $x_4 = 3.822$,
- 4) $j = 36$, $x_1 = .3407$, $x_2 = .3843$, $x_3 = .6845$, $x_4 = 6.320$, $x_5 = -1.342$, $x_6 = -1.285$,
- 5) $j = 60$, $x_1 = .3356$, $x_2 = .3618$, $x_3 = .6472$, $x_4 = 11.31$, $x_5 = -1.640$, $x_6 = -1.547$.

Отсюда явствуют (a) и (c). □

⁶⁾ Ю.Сакане [10] аналогичным способом проверил положительную определенность метрики Эйнштейна (iv) в SU_4/T^3 (см. выше, § 2, (iv)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д.В.Алексеевский, А.М.Переломов. Инвариантные метрики Кэлера–Эйнштейна на компактных однородных пространствах. — Функциональный Анализ и его прил. 20 (1986), вып. 3. 1–16.
- [2] В.И.Арнольд, А.Н.Варченко, С.М.Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. М.:Наука.1982.
- [3] Andreas Arvanitoyeorgos, Ioannis Chrysikos, and Yusuke Sakane. Homogeneous Einstein metrics on G_2/T . arXiv:1010.3661, 18 oct 2010.
- [4] C. Böhm–M. Kerr: Low dimensional homogenous Einstein manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 358(4) (2006) 1455-1468.
- [5] G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope. Einstein Metrics on Group Manifolds and Cosets. arXiv:0903.2493
- [6] Michail M. Graev. *On the number of invariant Einstein metrics on a compact homogeneous space, Newton polytopes and contractions of Lie algebras*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. Vol. 3, Nos. 5 & 6 (2006) 1047-1075
- [7] М.М.Граев. *Число инвариантных метрик Эйнштейна в однородном пространстве, многогранник Ньютона и сжатия алгебры Ли*. Известия АН, сер.матем., т.71, номер 2, 2007, с.29–88. English translation: M. M. Graev. The number of invariant Einstein metrics on a homogeneous space, Newton polytopes and contractions of Lie algebras. Izvestiya: Mathematics, 2007, 71:2, 247-306 (Izvestiya RAN: Ser. Mat. 71:2 (2007), 29-88).
- [8] М.М.Граев. *Оценка числа инвариантных эйнштейновых метрик на однородных пространствах*. Диссертация. Москва. МГУ. Механико-математический факультет. 2008.
- [9] А.Л.Онищик. Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований. Тр. Моск. мат. об-ва, 1962, 11, 199–242.
- [10] Y.Sakane. Homogeneous Einstein Metrics on flag manifolds, Lobach.Jour.of Math. 4 71–87, (1999) [Автор указывает, что инвариантные метрики Эйнштейна в SU_4/T^3 рассматривались ранее в следующей работе: R.Senda. Improved Gröbner basis algorithms and its applications, Master thesis, Osaka University (1997) (in Japanese).]

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, 117218,
 НАХИМОВСКИЙ ПРОСПЕКТ, 36, КОР. 1

E-mail address: mmgraev@niisi.msk.ru